Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Институт компьютерных наук и кибербезопасности

Высшая школа компьютерных технологий и информационных систем

**Отчёт расчетной работе № 1**

Дисциплина: Системный анализ и принятие решений.

Выполнил студент гр. 5130901/10101 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Фоничев И.Р. (подпись)

Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Сиднев А.Г. (подпись)

“ ” февраля 2024 г.

Санкт-Петербург

2024

# Условие:

## Вариант:

Вариант №13.

Граф №13.

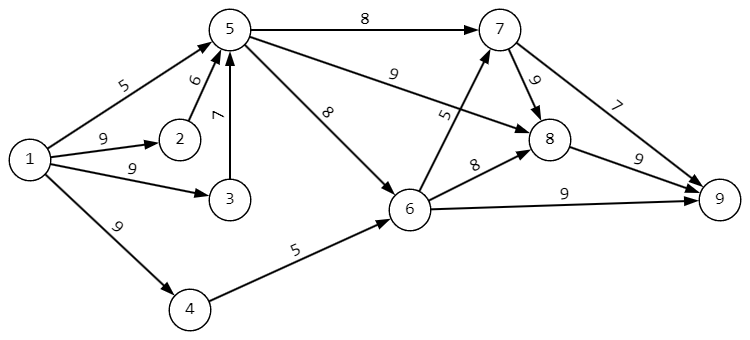


Рис. 1.1. Граф №13.

Число исполнителей 3.

Решающее правило: Короткие работы вперед.

## Условие задания:

Выполнить следующие разделы:

1. Определить наиболее ранние моменты начала работ с использованием метода математического программирования.
2. Определить наиболее ранние моменты начала работ и их интенсивности, если длительность равна интенсивности выполнения работ, а суммарная интенсивность не превышает 75% от общего числа выполняемых работ.
3. Самостоятельно распределить работы между заданным числом исполнителей и сформулировать задачу математического программирования с бинарными индикаторными переменными. Определить число бинарных переменных и дополнительных ограничений в этой задаче и дать содержательную формулировку части ограничений с бинарными переменными.
   1. Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием команды **intlinprog**. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.
4. Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.
5. Найти те же характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием математического программирования.
6. Определить помимо полных резервов времени работ резервы времени, относящиеся к событиям сетевого графа, а именно *.*
7. Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания.

Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

1. Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму Гантта.

# Ход решения

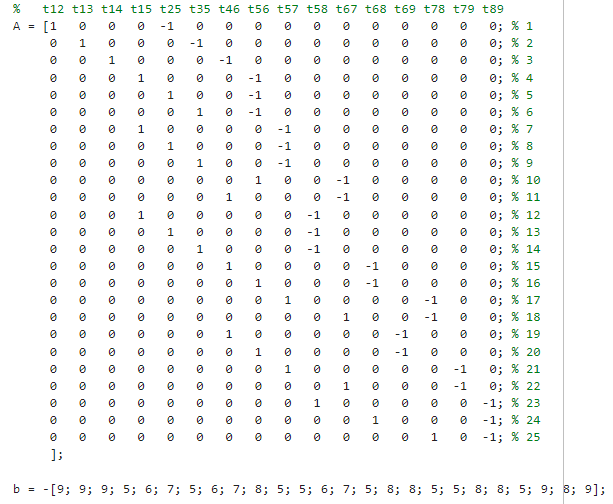
## Определить наиболее ранние моменты начала работ с использованием метода математического программирования:

Для графа, представленного на Рис. 1.1, составим систему неравенств для последующего решения с помощью методов линейного программирования. Обозначим за наиболее ранний момент начала работы , а за – наиболее ранний момент окончания всех работ.

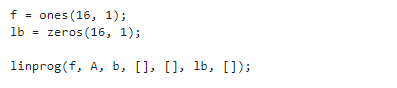
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

Задача оптимизации – минимизация следующей функции:

Решим эту задачу с помощью функции Matlab linprog. Для этого преобразуем полученные ранее ограничения в матрицы и :



После чего вызовем linprog:



Полученный результат выглядит следующим образом:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 9 | 9 | 9 | 16 | 16 | 16 | 24 | 24 | 24 | 29 | 29 | 38 |

Табл. 2.1. Время начала всех работ.

Теперь мы знаем минимальное время начала каждой работы. Для получения информации о времени выполнения всех работ необходимо к времени начала работы прибавить время её выполнения т.е. 9.

Итого время выполнения всех работ равно 47.

## Определить наиболее ранние моменты начала работ и их интенсивности, если длительность равна интенсивности выполнения работ, а суммарная интенсивность не превышает 75% от общего числа выполняемых работ.

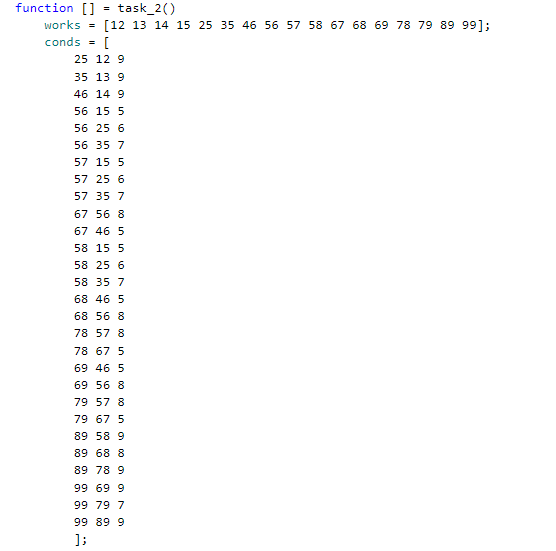
Мы сможем увеличить время выполнения всех работ за счет добавления интенсивностей работ, отличных от 1 – некоторые работы ускорим (интенсивность > 1), а некоторые замедлим (интенсивность < 1), если это потребуется.

Изменим исходную систему неравенств согласно правилу:

где – интенсивность работы.

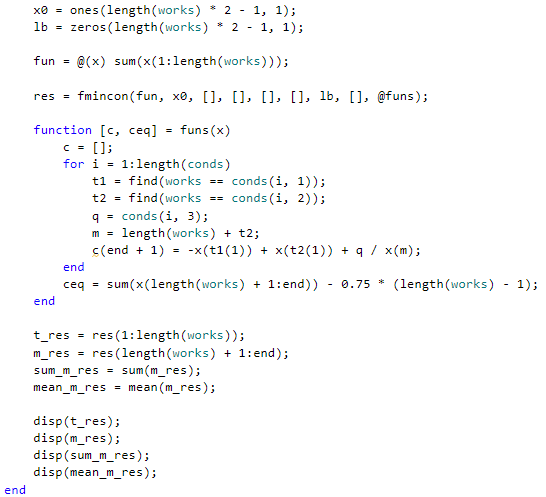
Такими условиями мы пытаемся минимизировать время начала всех работ, при интенсивности, не превышающей 75% от числа выполняемых работ т.е. 15.

Создадим набор всех «работ» т.е. ребер графа и массив троек, где закодируем систему неравенств, созданную ранее:



Стоит заметить, что появилась работа-фальшивка. Это необходимо, чтоб MATLAB оптимизировал также и путь из 8 в 9 вершину и выводил нам результат этой оптимизации.

Создадим необходимые параметры для fmincon, а также функцию, которая распарсит заданные нам тройки в требуемые для fmincon значения и выведем результат выполнения на экран:



В результате выполнения получим следующие значения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Моменты начала работ | |  | Интенсивности | |
|  | 0.0000 |  |  | 1.4184 |
|  | 0.0000 |  |  | 1.4667 |
|  | 0.0000 |  |  | 0.9760 |
|  | 0.0000 |  |  | 0.4111 |
|  | 6.3451 |  |  | 1.0312 |
|  | 6.1364 |  |  | 1.1614 |
|  | 9.2213 |  |  | 0.5455 |
|  | 12.1638 |  |  | 1.2856 |
|  | 12.1638 |  |  | 0.6051 |
|  | 12.1638 |  |  | 0.3338 |
|  | 18.3867 |  |  | 0.7145 |
|  | 18.3867 |  |  | 0.3858 |
|  | 18.3867 |  |  | 0.2405 |
|  | 25.3845 |  |  | 0.6550 |
|  | 25.3845 |  |  | 0.2301 |
|  | 39.1247 |  |  | 0.5394 |
|  | 55.8086 |  |  |  |

Табл. 2.2. Результат выполнения программы.

Сумма интенсивностей равна 12, что составляет ровно 75% от числа исполняемых работ, как и требовалось в задании. Стоит отметить, что общее время работы возрастало до 55.8 с 47 т.е. на 8.8 секунд. Это связано с тем, что при уменьшении интенсивности, некоторые работы стали работать дольше.

## Самостоятельно распределить работы между заданным числом исполнителей и сформулировать задачу математического программирования с бинарными индикаторными переменными. Определить число бинарных переменных и дополнительных ограничений в этой задаче и дать содержательную формулировку части ограничений с бинарными переменными.

Распределим 16 работ по трем исполнителям следующим образом:

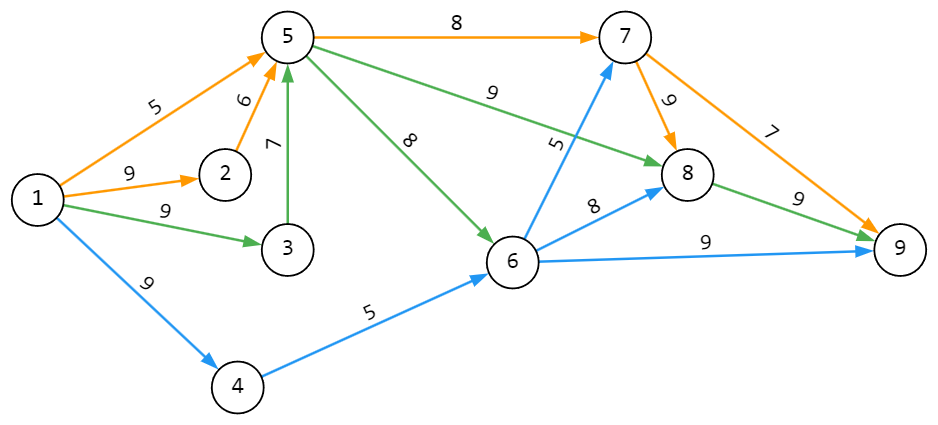


Рис. 2.1. Граф с задачами, распределенными по исполнителям.

Таким образом желтый цвет – первый исполнитель (6 задач), зеленый цвет – второй исполнитель (5 задач), а синий – третий (5 задач).

Составим следующую систему для каждой пары работ

где , тогда число дополнительных ограничений задачи c бинарными переменными будет равно , а число бинарных переменных .

### Изменить формулировку задачи так, чтобы число бинарных переменных не превышало 10. Решить полученную задачу с использованием команды intlinprog. Определить мощность множества бинарных переменных задачи и дать содержательную интерпретацию полученному решению.

Упростим поставленную задачу, пусть только некоторые задачи выполняются определенным исполнителем, а над остальными может работать неограниченное число исполнителей:

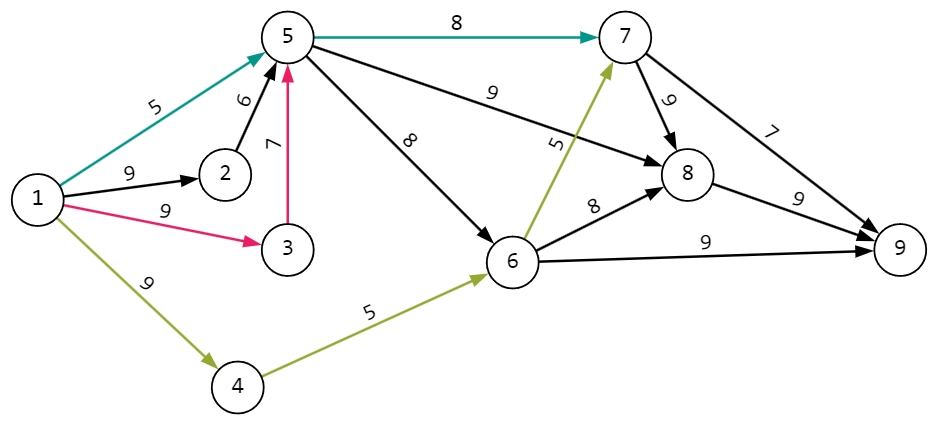
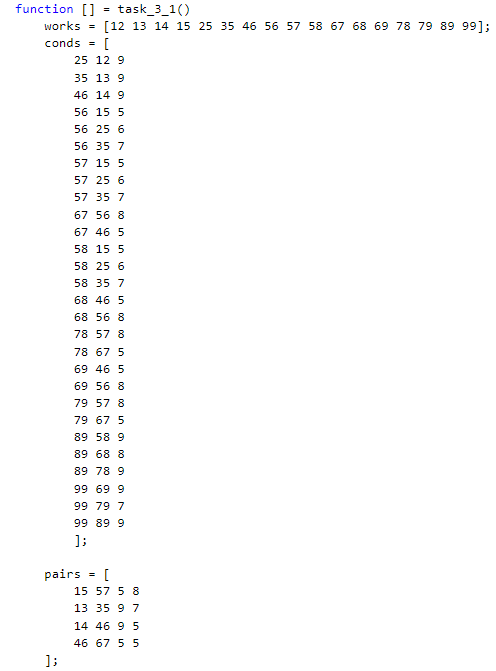


Рис. 2.2. Граф с задачами, часть которых распределена по исполнителям.

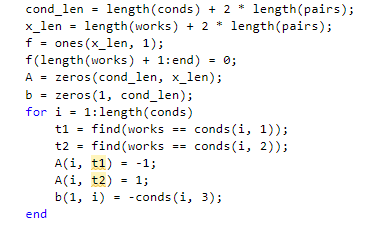
Таким образом синий цвет – первый исполнитель (2 задачи), розовый цвет – второй исполнитель (2 задачи), а зеленый – третий (3 задачи), что дает нам дополнительных бинарных переменных и

дополнительных ограничений:

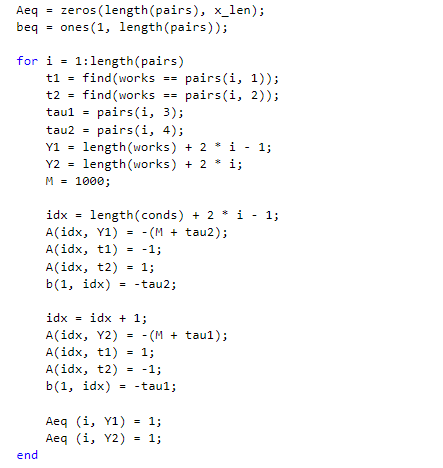
После чего решим задачу Matlab с использованием функции intlinprog. Для начала зададим наш граф, как делали это ранее, также добавим пары для новых ограничений и длины путей на каждой из задач:



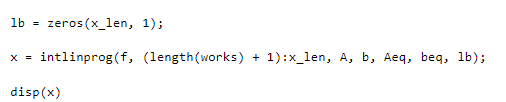
Далее создадим массив, как в пункте 2.1, но используя наши объявления:



Теперь необходимо создадим уравнения, которые добавились дополнительными ограничениями:



Все необходимые переменные были созданы, теперь запустим intlinprog и посмотрим на результат:



В результате запуска получим следующие значения:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Моменты начала работ | |  | Бинарные переменные | |
|  | 0 |  |  | 1 |
|  | 0 |  |  | 0 |
|  | 0 |  |  | 1 |
|  | 0 |  |  | 0 |
|  | 9 |  |  | 1 |
|  | 9 |  |  | 0 |
|  | 9 |  |  | 1 |
|  | 16 |  |  | 0 |
|  | 16 |  |  |  |
|  | 16 |  |  |  |
|  | 24 |  |  |  |
|  | 24 |  |  |  |
|  | 24 |  |  |  |
|  | 29 |  |  |  |
|  | 29 |  |  |  |
|  | 38 |  |  |  |
|  | 47 |  |  |  |

Табл. 2.3. Результат работы программы.

Как мы видим по значениям бинарных переменных и времени начала работы наши условия выполняются.

Первый исполнитель выполняет сначала работу 15, а потом 57 (т. к. значение = 0, а = 16)

## Найти характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием метода динамического программирования. Привести соответствующие уравнения Беллмана. Определить критические пути на графе.

Каждому узлу на графе можно сопоставить два момента: минимальное время, когда событие будет осуществлено и наиболее поздний момент .

Воспользуемся методом динамического программирования и определим наиболее ранние моменты для каждого узла графа:

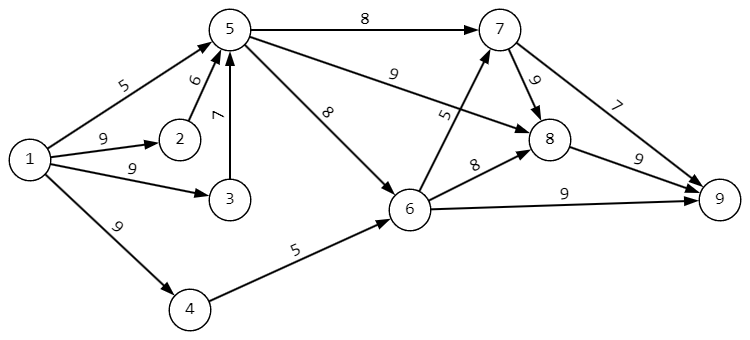


Рис. 2.3. Граф.

Самое ранее время начала выполнения работы – время, когда выполнятся все работы, предшествующие заданной:

Полученные значение совпадают с полученными в предыдущих пунктах, что свидетельствует о корректности проделанной работы.

Теперь используя полученные значения определим наиболее поздние моменты времени :

По формуле определим резервы времени выполнения всех работ:

Работы, у которых резерв равен 0 – критический путь. Их длительность напрямую влияет на продолжительность выполнения всех работ.

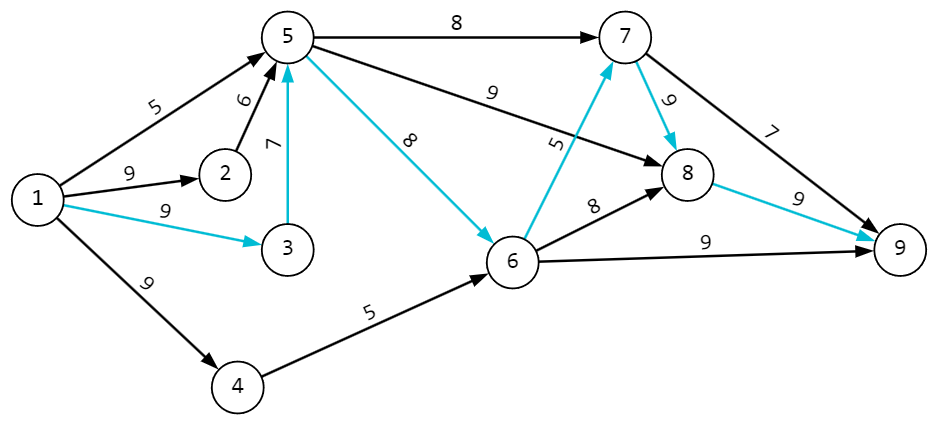


Рис. 2.4. Критический путь в графе.

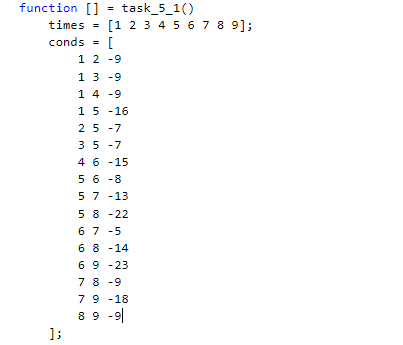
## Найти те же характеристики , и расписания выполнения комплекса работ с использованием математического программирования.

Оптимизационная задача для поиска наиболее ранних моментов может быть сформулирована следующим образом:

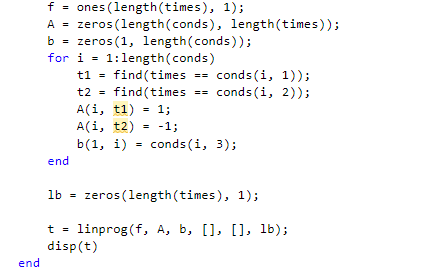
Для исходного графа получим следующую оптимизационную задачу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |
|  |  |  |

Запишем эти выражения в массивы:



Запишем эти выражения в виде, подходящем для linprog и вычислим:



Полученный результат выглядит следующим образом:

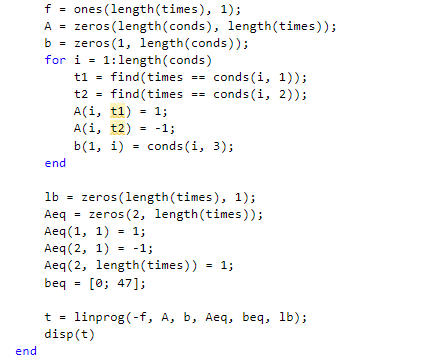
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 9 | 9 | 9 | 16 | 24 | 29 | 38 | 47 |

Табл. 2.4. Результат решения программой.

Как можно заметить, они идентичны полученным ранее другим способом.

Оптимизационная задача для поиска наиболее поздних моментов может быть сформулирована следующим образом:

Для решения поставленной задачи необходимо чуть-чуть изменить вызов функции, объявления условий останется аналогичным:



Результатом выполнения будет следующим:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 10 | 9 | 19 | 16 | 24 | 29 | 38 | 47 |

Табл. 2.5. Результат выполнения программы.

Как можно заметить, эти значения идентичны посчитанным ранее.

Очевидно, что значение будет аналогично равно посчитанному ранее.

## Определить помимо полных резервов времени работ резервы времени, относящиеся к событиям сетевого графа, а именно .

По формуле определим независимые резервы 1-го порядка

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|  | 0 | 9 | 9 | 9 | 16 | 24 | 29 | 38 | 47 |
|  | 0 | 10 | 9 | 19 | 16 | 24 | 29 | 38 | 47 |
|  | 0 | 1 | 0 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Табл. 2.6. Независимый резерв 1-го порядка.

По формуле определим свободные резервы времени:

По формуле определим независимые резервы 2-го порядка:

## Рассмотреть вероятностную постановку задачи анализа расписания. Считать СКО времен выполнения работ равными 5% от их длительностей. Предполагая неизменным критический путь (оценить справедливость этого предположения) найти вероятность того, что время выполнения комплекса работ не превысит найденного для детерминированной задачи в п.1 на 10%.

Оценим справедливость неизменности критического пути. Среднее значение длительности работ в графе равно 7.625 временных единиц. По условию СКО равно 5%, то есть . Следовательно, значение длительности работы может отклониться более чем на 1 с очень маленькой вероятностью (по правилу трех сигм). Так как минимальные временной резерв у работы, не лежащей на критическом пути равен 1, то вероятность изменения критического пути очень мала.

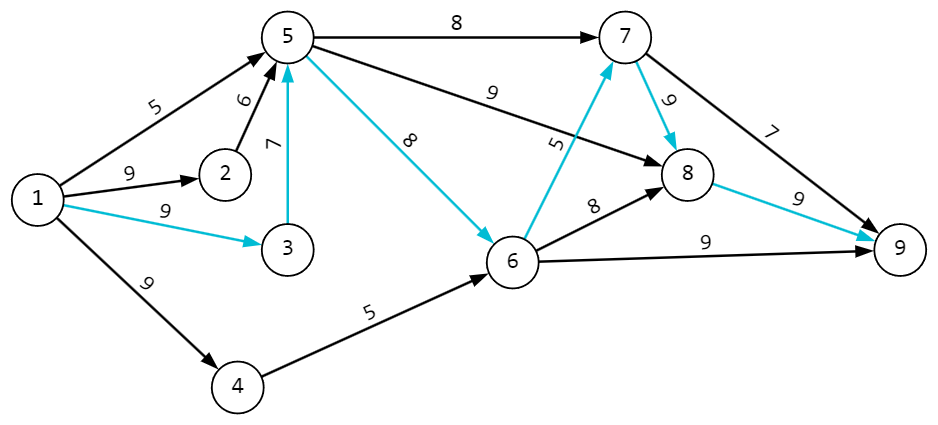


Рис. 2.5. Критический путь в графе.

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий:

Дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

Для суммы случайных величин длительностей работ имеем:

где – это функция Лапласа (табулированный интеграл вероятности):

По условию время выполнения комплекса работ не должно превышать детерминированное значение на 10%, то есть на .

Результат показывает, что шанс отклониться от математического ожидания времени выполнения более чем на 10% крайне мал.

## Представить пошаговую процедуру имитационного моделирования расписания по схеме событий с учетом числа исполнителей и решающего правила ранжирования работ из числа возможных. По результатам моделирования построить диаграмму Гантта.

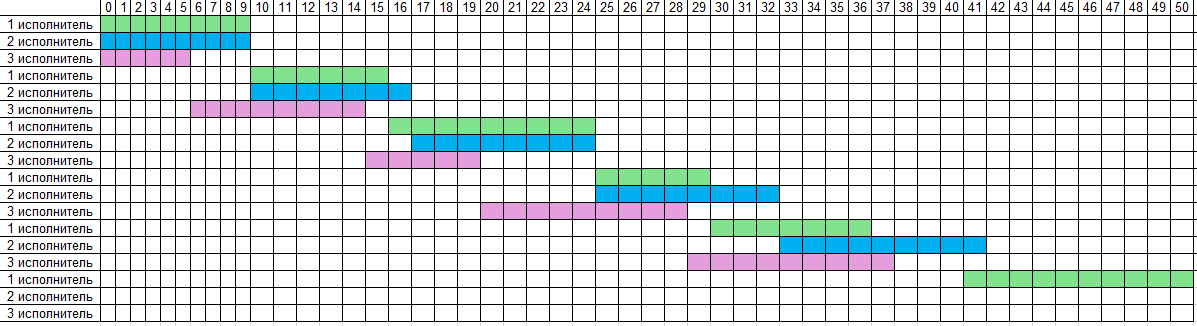
Правило выбора работ:

* Решающее правило: Короткие работы — вперед
* Число исполнителей: 3

Параметры:

* – системное время.
* – ранжированный список возможных работ.
* – список выполняемых на момент времени Т работ: начатых, но не завершенных к этому моменту.
* – список времен освобождения ресурсов на момент времени Т.
* – список выполненных на момент времени T работ.
* – список осуществленных событий.
* – множество дуг-работ, исходящих из осуществленных событий.
* – список работ, выполняемых ресурсом s.
* – список моментов начала работ, выполняемых ресурсом s.
* – список моментов окончания работ, выполняемых ресурсом s.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Что доступно | Выполняется сейчас | Время на выполнение | Список выполненных | Какие узлы закрыли | Все осущ работы+ доступ | Кто и что делает |  |  |
| 0 | 12, 13, 14, 15 |  |  |  | 1 | 12, 13, 14, 15 |  |  |  |
| 0 | 14 | 12  13  15 | 9  9  5 |  | 1 | 12, 13, 14, 15 | 1: 12  2: 13  3: 15 | 0 | 9  9  5 |
| 5 |  | 13  14 | 9  9 | 15 | 1 | 12, 13, 14, 15 | 1: 12  2: 13  3: 14 | 0  5 | 9  14 |
| 9 | 25, 35 | 14 | 9 | 12, 13, 15 | 1, 2 | 12, 13, 14, 15, 25, 35 | 3: 14 | 5 | 14 |
| 9 |  | 14  25  35 | 9  6  7 | 12, 13, 15 | 1, 2 | 12, 13, 14, 15, 25, 35 | 1: 25  2: 35  3: 14 | 9  9  5 | 15  16  14 |
| 14 | 46 | 35 | 7 | 12, 13, 14, 15 | 1, 2, 3 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46 | 1: 25  2: 35 | 9 | 16 |
| 14 |  | 25  35  46 | 6  7  5 | 12, 13, 14, 15 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46 | 1: 25  2: 35  3: 46 | 9  9  14 | 15  16  19 |
| 15 |  | 35  46 | 7  5 | 12, 13, 14, 15, 25 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46 | 2: 35  3: 46 | 9  14 | 16  19 |
| 16 | 56, 57, 58 | 46 | 5 | 12, 13, 14, 15, 25, 35 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 3: 46 | 14 | 19 |
| 16 | 58 | 46  56  57 | 5  8  8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 1: 56  2: 57  3: 46 | 16  16  14 | 24  24  19 |
| 19 | 58 | 56  57 | 8  8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46 | 1, 2, 3, 4 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 1: 56  2: 57 | 16 16 | 24 24 |
| 19 |  | 56  57  58 | 8  8  9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 1: 56  2: 57  3: 58 | 16  16  19 | 24  24  28 |
| 24 | 67, 68, 69 | 58 |  | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69 | 3: 58 | 19 | 28 |
| 24 | 69 | 58  67  68 | 9  5  8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57 | 1, 2, 3, 4, 5 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69 | 1: 67  2: 68  3: 58 | 24  24  19 | 29  32  28 |
| 28 | 69 | 67  68 | 5  8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69 | 1: 67  2: 68 | 24  24 | 29  32 |
| 28 |  | 67  68  69 | 5  8  9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58 | 1, 2, 3, 4, 5, 6 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69 | 1: 67  2: 68  3: 69 | 24  24  28 | 29  32  37 |
| 29 | 78, 79 | 68  69 | 8  9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 2: 68  3: 69 | 24  28 | 32  37 |
| 29 | 78 | 67  68  79 | 9  8  7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 1: 79  2: 68  3: 69 | 29  24  28 | 36  32  37 |
| 32 | 78 | 69  79 | 9  7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 1: 79  3: 69 | 29  28 | 36  37 |
| 32 |  | 69  79  78 | 9  7  9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 1: 79  2: 78  3: 69 | 29  32  28 | 36  41  37 |
| 36 |  | 69  78 | 9  9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 79 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 2: 78  3: 69 | 32  28 | 41  37 |
| 37 |  | 78 | 9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 79 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 2: 78 | 32 | 41 |
| 41 | 89 |  |  | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79. 89 |  |  |  |
| 41 |  | 89 | 9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79. 89 | 1: 89 | 41 | 50 |
| 50 |  |  |  | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79, 89 | 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 | 12, 13, 14, 15, 25, 35, 46, 56, 57, 58, 67, 68, 69, 78, 79. 89 |  |  |  |
| I(50) = I – конец работы | | | | | | | | | |

По результатам таблицы составим диаграмму Ганта: 

*Рис. 2.6. Диограмма Ганта.*

# Вывод:

В ходе расчетной работы были получены навыки по построению модели расписания, а также применению методов линейного и динамического программирования в рамках поставленной задачи.

# Приложение:

Листинг на github: <https://github.com/IlyaFonichev/SADM_6_1>